بسم‌الله الرحمن الرحیم

پاسخ تمرین‌های اقتصاد کلان پیشرفته‌ی ۱

استاد: دکتر کوثر یوسفی
دانشـــکده‌ی اقتصاد
دانشـــگاه تـهـران

ســری نخست
نیم‌سال اول ۱۴۰۲ — ۱۴۰۱
پاسخ‌نامه‌ی پیش‌نهادی!

توضیح: این پاسخ‌نامه به هیچ‌عنوان عاری از اشکال و ایراد نیست! بیان اشتباه‌ها چه کلی و چه جزیی مورد قدردانی قرار خواهد گرفت. بدین منظور با آدرس رایانامه‌ی `s.alaamati@sharif.edu` در ارتباط باشید.

سوال ۱. اقتصادی ایستا[1] را در نظر بگیرید که در آن عوامل ترجیحات خود را با توجه تابع مطلوبیت زیر

$$u(c,\ell) = \alpha_c \ln c + \alpha_\ell \ln \ell$$

به روی مصرف و استراحت برمی‌گزینند. تابع تکنولوژی تولید را به‌صورت

$$y = z(1-\ell)^\beta, \quad \beta > 0$$

را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.

آ) نخست نشان دهید شرط $\alpha_c > 0$ و $\alpha_\ell > 0$ برای برقراری روابط

$$\frac{\partial u}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \ell} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \ell^2} < 0 \tag{1}$$

لازم و کافی هستند.

ب) مساله‌ی برنامه‌ریز اجتماعی را برای این اقتصاد نوشته و آن‌را برای پیدا کردن تخصیص‌های بهینه حل کنید.

ج) اگر برنامه‌ریز مرکزی بخواهد به اندازه‌ی g از تولید را به یک کالای عمومی بجای کالای خصوصی c اختصاص دهد، مساله‌ی برنامه‌ریز اجتماعی را دوباره بیان و برای تخصیص عنوان شده حل کنید.

د) تحلیل کنید افزایش β چه تاثیری روی تخصیص‌های بهینه در هر دو حالت **(ب)** و **(ج)** خواهد داشت.

پاسخ ۱. دوباره تصریح می‌کنیم که منظور از ℓ در این تمرین میزان استراحت و یا اوقات فراغت است، با مفروضات مساله به حل بخش‌های مختلف آن می‌پردازیم.

آ) باید نشان دهیم که مثبت بودن ضرایب در تابع مطلوبیت از چهار شرط داده شده‌ی (۱) نتیجه می‌شود، و برقرار چهار بالا ایجاب می‌کند که ضرایب در شرایط $\alpha_c > 0$ و $\alpha_\ell > 0$ صدق می‌کنند. داریم که:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial c} = \dfrac{\alpha_c}{c} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \ell} = \dfrac{\alpha_\ell}{\ell} \end{cases}$$

[1] Static economy

اما روشن است که میزان مصرف و میزان اختصاص به استراحت و یا اوقات فراغت عددی نامنفی است، از این‌رو با استفاده از دو فرض نخست از رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\frac{\alpha_c}{c} > ۰, \quad \frac{\alpha_\ell}{\ell} > ۰ \quad \Rightarrow \quad \alpha_c > ۰ \text{ و } \alpha_\ell > ۰$$

به این‌ترتیب یکی از دو قسمت سوال (آ) حل می‌شود.

نشان دادن قسمت دوم نیز سرراست است، با بهره‌گیری از این حقیقت که میزان مصرف و میزان اختصاص به استراحت و یا اوقات فراغت عددی نامنفی است، داریم:

$$c > ۰, \quad \ell > ۰ \quad \alpha_c > ۰, \quad \alpha_\ell > ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial c} = \dfrac{\alpha_c}{c} > ۰ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \ell} = \dfrac{\alpha_\ell}{\ell} > ۰ \\ \dfrac{\partial^۲ u}{\partial c^۲} = -\dfrac{\alpha_c}{c^۲} < ۰ \\ \dfrac{\partial^۲ u}{\partial \ell^۲} = -\dfrac{\alpha_\ell}{\ell^۲} < ۰ \end{cases}$$

و قسمت دوم سوال (آ) نیز نشان داده شد.

ب) بیشینه‌کردن مطلوبیت عوامل توسط برنامه‌ریزی مرکزی مساله‌ی اصلی برنامه‌ریز اجتماعی در این اقتصاد است، از این‌رو به زبان ریاضی این مساله را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \max\limits_{c,\ell} \quad (\alpha_c \ln c + \alpha_\ell \ln \ell) \\ \text{قیود} \qquad c \leq y \end{cases}$$

از آن‌جایی که اتلاف منابع و یا دورریز تولید در چنین اقتصادی مطرح نیست، می‌توانیم نابرابری $c \leq y$ را به‌صورت برابری $c = y$ در نظر گرفته و مساله‌ی بیشینه‌یابی را حل کنیم. معمولاً روش‌های خلاقانه و یا ابتکاری برای به‌دست آوردن تخصیص‌های بهینه به‌جای تعریف تابع لاگرانژ و به‌دست آوردن شرایط مرتبه‌ی نخست نیز کارگر است، ولی به دلیل نیاز به تسلط روی قضیه‌ی کان‌ـ تاکر از این روش حل مساله را پیش خواهیم برد. تابع لاگرانژ را به‌گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c, \ell, \lambda) &= \alpha_c \ln c + \alpha_\ell \ln \ell - \lambda(c - y) \\ &= \alpha_c \ln c + \alpha_\ell \ln \ell - \lambda\left(c - z(۱ - \ell)^\beta\right) \end{aligned}$$

پس از تعریف تابع لاگرانژ، نخستین گام یافتن شرایط مرتبه‌ی نخست است که از آن به FOC نیز یاد می‌شود، داریم که:

$$\text{FOC:} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = \dfrac{\alpha_c}{c} - \lambda = ۰ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} = \dfrac{\alpha_\ell}{\ell} - \lambda\beta z(۱ - \ell)^{\beta - ۱} = ۰ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -c + z(۱ - \ell)^\beta = ۰ \end{cases} \tag{۲}$$

معمولاً سنت چنین است که از تقسیم طرفین دو تساوی نخست از معادلات شرایط مرتبه‌ی نخست رابطه‌ای حاصل می‌شود که نسبت تخصیص‌های بهینه‌ی مصرف و اوقات استراحت را نشان می‌دهد و از آن به معادله‌ی اویلر یاد می‌شود. دلیل این کار حذف ضریب λ است. در این مساله داریم:

$$\frac{\frac{\alpha_c}{c}}{\frac{\alpha_\ell}{\ell}} = \frac{\lambda}{\lambda\beta z(۱-\ell)^{\beta-۱}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_c}{\alpha_\ell}\cdot\frac{\ell}{c} = \frac{۱}{\beta z(۱-\ell)^{\beta-۱}}$$

از معادله‌ی آخر نیز همان شرط بدیهی قید بودجه خانوار که برنامه‌ریز اجتماعی برای بیشینه‌سازی مطلوبیت به آن نیاز دارد نتیجه می‌شود. از این‌رو دستگاه معادلات (۲) به دستگاه زیر تحویل می‌شود:

$$\begin{cases} c &= \dfrac{\alpha_c}{\alpha_\ell}\times\beta z\ell(۱-\ell)^{\beta-۱} \\ \\ c &= z(۱-\ell)^{\beta} \end{cases}$$

و از آن بی‌درنگ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\alpha_c}{\alpha_\ell}\times\beta z\ell(۱-\ell)^{\beta-۱} = z(۱-\ell)^{\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_c}{\alpha_\ell}\times\beta z\ell = z(۱-\ell)$$

و سرانجام غیرصفر بودن پارامتر z، حاکی از آن‌است که

$$\ell = \frac{۱}{\frac{\alpha_c}{\alpha_\ell}\times\beta+۱} = \frac{\alpha_\ell}{\alpha_c\beta+\alpha_\ell}$$

و مقدار بهینه‌ی c نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} c &= z(۱-\ell)^{\beta} \\ &= z(۱-\frac{\alpha_\ell}{\alpha_c\beta+\alpha_\ell})^{\beta} \\ &= z\left(\frac{\alpha_c\beta}{\alpha_c\beta+\alpha_\ell}\right)^{\beta} \end{aligned}$$

توجه: چرا در این اقتصاد پاسخ گوشه‌ای نداریم؟

ج) حل مساله‌ی برنامه‌ریز اجتماعی در این حالت نیز مشابه حالت پیشین است، با این تفاوت که مقداری از تولید باید صرف ایجاد و اختصاص کالای عمومی به خانوار نمونه کند، بدین صورت که باید رابطه‌ی $c \leq y-g$ برقرار باشد. دوباره تاکید می‌کنیم در این اقتصاد اتلاف منابع تولیدی وجود ندارد و از این‌رو بیان ریاضی مساله‌ی برنامه‌ریز اجتماعی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \max\limits_{c,\ell} & (\alpha_c \ln c + \alpha_\ell \ln \ell) \\ \text{قیود} & c \ \leq \ y-g \end{cases}$$

دوباره تابع لاگرانژ را تعریف کرده و سعی می‌کنیم با حل معادلات ناشی از شرایط مرتبه‌ی نخست، تخصیص‌های بهینه را بیابیم.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c,\ell,\lambda) &= \alpha_c\ln c + \alpha_\ell \ln\ell - \lambda(c-y+g) \\ &= \alpha_c\ln c + \alpha_\ell\ln\ell - \lambda\left(c+g-z(۱-\ell)^{\beta}\right) \end{aligned}$$

داریم که:

$$\text{FOC:} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = \dfrac{\alpha_c}{c} - \lambda = ۰ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} = \dfrac{\alpha_\ell}{\ell} - \lambda \beta z(۱-\ell)^{\beta-۱} = ۰ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -c - g + z(۱-\ell)^{\beta} = ۰ \end{cases} \qquad (۳)$$

مشابه قسمت **(ب)**، دو معادله‌ی نخست را برهم تقسیم کرده و به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{\alpha_c}{\alpha_\ell} \cdot \frac{\ell}{c} = \frac{۱}{\beta z(۱-\ell)^{\beta-۱}}$$

بنابراین دستگاه معادلات (۳) به دستگاه زیر تحویل می‌شود:

$$\begin{cases} c = \dfrac{\alpha_c}{\alpha_\ell} \times \beta z \ell (۱-\ell)^{\beta-۱} \\ c = z(۱-\ell)^{\beta} - g \end{cases}$$

و پس از ساده‌سازی داریم:

$$\frac{\alpha_c}{\alpha_\ell} \times \beta z \ell (۱-\ell)^{\beta-۱} = z(۱-\ell)^{\beta} - g \quad \Rightarrow \quad z(۱-\ell)^{\beta-۱}\left(۱ - \ell - \frac{\alpha_c}{\alpha_\ell}\beta\ell\right) = g$$

همان‌گونه که مشخص است امکان حل پارامتری معادله‌ی بالا میسر نیست. از این‌رو معادله‌ی نهایی به‌صورت ضمنی بیان می‌شود. برای پاسخ به بخش **(د)** نیاز داریم این رابطه‌ی ضمنی را بیشتر ساده کنیم، با ضرب طرفین تساوی بالا در $۱ + \ell$ داریم:

$$(c+g)\left(۱ - \ell - \frac{\alpha_c}{\alpha_\ell}\beta\ell\right) = (۱+\ell)g \qquad (۴)$$

د) برای پاسخ به این سوال کافی است از توابع تخصیص بهینه نسبت به β مشتق بگیریم. به عنوان نمونه، برای تخصیص بهینه‌ی

$$\ell(\beta) = \frac{\alpha_\ell}{\alpha_c\beta + \alpha_\ell}$$

داریم که

$$\frac{d\ell}{d\beta} = -\frac{\alpha_c\alpha_\ell}{(\alpha_c\beta+\alpha_\ell)^۲} < ۰$$

این حاکی از آن است که افزایش β منجر به کاهش میزان کار در خانوار نمونه خواهد شد.

حال به بررسی رفتار تخصیص بهینه‌ی نسبت به تغییر β می‌پردازیم.

$$c(\beta) = z\left(\frac{\alpha_c\beta}{\alpha_c\beta+\alpha_\ell}\right)^{\beta} \quad \Rightarrow \quad \ln c(\beta) = z\beta \ln\left(\frac{\alpha_c\beta}{\alpha_c\beta+\alpha_\ell}\right)$$

چون تابع لگاریتم طبیعی تابع صعودی یکنواخت است، از این‌رو بررسی رفتار تابع

$$c'(\beta) = z\beta \ln\left(\frac{\alpha_c\beta}{\alpha_c\beta + \alpha_\ell}\right)$$

کفایت می‌کند تا پیرامون تاثیر تغییر β روی مصرف اظهار نظر کنیم. با مشتق‌گیری داریم:

$$\begin{aligned} \frac{dc'}{d\beta} &= z\left(\ln\left(\frac{\alpha_c\beta}{\alpha_c\beta + \alpha_\ell}\right) + \beta\frac{\frac{\alpha_c\alpha_\ell}{(\alpha_c\beta+\alpha_\ell)^۲}}{\frac{\alpha_c\beta}{\alpha_c\beta+\alpha_\ell}}\right) \\ &= z\left(\underbrace{\ln\left(\frac{\alpha_c\beta}{\alpha_c\beta + \alpha_\ell}\right)}_{<۰} + \underbrace{\frac{\alpha_\ell}{\alpha_c\beta + \alpha_\ell}}_{>۰}\right) \end{aligned}$$

رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد بسته به مقدار β ممکن است میزان مصرف افزایشی و یا کاهشی باشد.

برای بحث پیرامون تغییرات اندازه‌ی مصرف و استراحت از رابطه‌ی (۴) از طرفین رابطه‌ی مورد نظر نسبت به β مشتق‌گیری می‌کنیم، در این‌صورت

$$\frac{dc}{d\beta}\left(۱ - \ell - \frac{\alpha_c}{\alpha_\ell}\beta\ell\right) + (c+g)\left(-۱ - \frac{\alpha_c}{\alpha_\ell}\ell - \frac{\alpha_c}{\alpha_\ell}\beta\frac{d\ell}{d\beta}\right) = g\frac{d\ell}{d\beta}$$

با توجه به این رابطه، امکان اظهار نظر پیرامون میزان تغییر مصرف و استراحت با توجه به تغییر β وجود ندارد.

سوال ۲. رابینسون و اقتصاد بسته‌ی تک محصولی با نارگیل را به خاطر بیاورید. تابع مطلوبیت او از الگوی خطی

$$u(c, \ell) = c + \beta\ell, \quad \beta > ۰$$

پیروی می‌کند. زندگی تنها در جزیره به او آموخته که اگر ℓ واحد زمان از روز را صرف استراحت و بقیه را برای یافتن و تهیه‌ی غذا کند می‌تواند به میزان $(۱ - \ell)^\alpha$ واحد غذای مصرفی به دست آورد. این غذا در جزیره قابل نگه‌داری نیست و باید در روزی که به‌دست آمده مصرف شود. با این مفروضات به سوالات زیر پاسخ دهید.

آ) مساله‌ی هر روز رابینسون را به زبان ریاضی نوشته و میزان کارکرد بهینه‌ی او را پیدا کنید. سپس میزان مصرف غذای بهینه‌ی وی را یافته و استدلال کنید که چرا غذای اضافی باقی نمی‌ماند.

ب) چنین فرض کنید که رابینسون امکان حیات بدون مصرف غذا را دارد! استدلال کنید که آیا تعادل بهینه‌ای که منجر به عدم کار کردن وی باشد وجود دارد یا خیر. وجود یا عدم وجود چنین تعادلی را با حل مساله‌ی بیشینه‌ی مطلوبیت نشان دهید.

ج) فرض کنید کمینه‌ی مصرف غذا در هر روز برای رابینسون برای ادامه‌ی حیات مقدار $\left(\frac{۲\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{۱-\alpha}}$ باشد. ضمن بیان دوباره‌ی مساله‌ی رابینسون، مقدار بهینه‌ی کار او را به‌دست آورید.

د) تاثیر تغییرات مثبت روی پارامتر β را بر میزان تخصیص‌های بهینه‌ی رابینسون تحلیل کنید.

پاسخ ۲. از گفته‌های مساله روشن است که تابع تولید در این‌جا به‌صورت $y = (۱ - \ell)^\alpha$ است، و دوباره تصریح می‌کنیم در این مساله منظور از ℓ میزان استراحت است. به حل بخش‌های مختلف مساله می‌پردازیم. گفتنی است با توجه به خطی بودن تابع مطلوبیت و نیز مثبت بودن ضرایب این تابع خطی، وجود پاسخ گوشه‌ای محتمل است.

آ) رابینسون به عنوان یک خانوار نمونه و هم‌چنین یک بنگاه تولیدی در گام نخست تلاش می‌کند تا مطلوبیت خود را بیشینه کند. از آن‌جایی که با یک اقتصاد ایستا سروکار داریم، طبق گفته‌های مساله اتلاف منابع تولیدی بی‌معنی است، از این‌رو رابینسون هر آن‌چه تولید کرده را مصرف می‌کند، پس قید مساله‌ی بهینه‌یابی که در اینجا به‌صورت $c \leq y$ است را می‌توانیم به صورت تساوی $c = y$ بیان کنید. در این‌صورت مساله‌ی بیشینه‌سازی مطلوبیت به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \max\limits_{c,\, \ell} & (c + \beta\ell) \\ \text{قیود} & c \leq y \end{cases}$$

به‌روشنی تابع لاگرانژ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c, \ell, \lambda) &= c + \beta\ell - \lambda(c - y) \\ &= c + \beta\ell - \lambda\left(c - (۱ - \ell)^\alpha\right) \end{aligned}$$

حال شرایط مرتبه‌ی نخست ناشی از تابع لاگرانژ بالا را بیان می‌کنیم

$$\text{FOC:} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = ۱ - \lambda = ۰ \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} = \beta - \lambda\alpha(۱ - \ell)^{\alpha - ۱} = ۰ \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -c + (۱ - \ell)^\alpha = ۰ \end{cases} \tag{۵}$$

حل معادلات ناشی از دستگاه (۵) ساده بوده، و داریم

$$\lambda = ۱, \quad \Rightarrow \quad \underbrace{۱-\ell}_{\text{میزان کار}} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}, \quad \Rightarrow \quad c = (۱-\ell)^{\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}$$

از آن‌جایی که میزان مصرف رابینسون برابر $c^* = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}$ است، در این‌صورت میزان تولید وی برابر $y = (۱-\ell)^{\alpha}$ خواهد بود، و در نتیجه $c = y$. البته این نتیجه را پیشتر فرض کرده‌ایم، با این وجود حل مساله‌های بیشینه‌یابی بدون برقراری تساوی اکید در قیود نیز ممکن است.

ب) حیات بدون مصرف غذا در واقع قیدِ $c = ۰$ را به مساله‌ی بیشینه‌یابی مطلوبیت رابینسون می‌افزاید. باید دوباره به دنبال تخصیص‌های بهینه برای وی باشیم.

$$\begin{cases} \max\limits_{c,\,\ell} & (c+\beta\ell) \\ \text{قیود} & \begin{array}{ccc} c & \leq & y \\ c & = & ۰ \end{array} \end{cases}$$

در این‌صورت با توجه به وجود دو قید در مساله، تابع لاگرانژ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(c,\ell,\lambda_۱,\lambda_۲) = c + \beta\ell - \lambda_۱\left(c - (۱-\ell)^{\alpha}\right) - \lambda_۲ c$$

حال دوباره شرایط مرتبه‌ی نخست را یافته، و معادلات حاصل از آن‌را حل می‌کنیم.

$$\text{FOC:} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} & = & ۱ - \lambda_۱ - \lambda_۲ & = & ۰ \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} & = & \beta - \lambda_۱\alpha(۱-\ell)^{\alpha-۱} & = & ۰ \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_۱} & = & -c + (۱-\ell)^{\alpha} & = & ۰ \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_۲} & = & -c & = & ۰ \end{cases} \tag{۶}$$

آنچه از دستگاه (۶) مسلم است برقراری $c = ۰$ و $\ell = ۱$ است. برای آنکه قیود داده شده در دستگاه اعمال شوند[۲]، بایستی ضرایب $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ غیر صفر باشند، که چنین شرایطی برقرار است. از این‌رو، این یک تعادل است که منجر به عدم کار کردن رابینسون می‌شود.

ج) مشابه مساله‌ی قسمت **(ب)**، قید دیگری به مساله تحمیل شده است. این قید به زبان ریاضی به‌صورت $c \geq \left(\frac{۲\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{۱-\alpha}}$ بیان می‌شود. مساله‌ی بهینه‌یابی رابینسون به‌این صورت قابل نمایش است:

$$\begin{cases} \max\limits_{c,\,\ell} & (c+\beta\ell) \\ \text{قیود} & \begin{array}{ccc} c & \leq & y \\ c & \geq & \left(\frac{۲\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{۱-\alpha}} \end{array} \end{cases}$$

[2] Bind

باید با اعمال این قید مساله‌ی بیشینه‌یابی را دوباره حل کنیم. تابع لاگرانژ برای این بخش از مساله به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}(c,\ell,\lambda_۱,\lambda_۲) = c + \beta\ell - \lambda_۱\left(c - (۱-\ell)^{\alpha}\right) - \lambda_۲\left(\left(\frac{۲\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{۱-\alpha}} - c\right)$$

حال دوباره‌ی دستگاه معادلات شرایط مرتبه‌ی نخست را یافته و سعی در حل آن می‌کنیم.

$$\text{FOC:} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial c} &= ۱ - \lambda_۱ - \lambda_۲ &= ۰ \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \ell} &= \beta - \lambda_۱\alpha(۱-\ell)^{\alpha-۱} &= ۰ \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_۱} &= -c + (۱-\ell)^{\alpha} &= ۰ \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_۲} &= -\left(\dfrac{۲\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{۱-\alpha}} + c &= ۰ \end{cases} \tag{۷}$$

پیش از حل همیشه نگاهی به دستگاه معادلات ناشی از FOC داشته باشید! در اینجا از دو معادله‌ی انتهایی دستگاه (۷) می‌توانیم مقدار ℓ را بیابیم. زیرا داریم که

$$c = (۱-\ell)^{\alpha}, \quad c = \left(\frac{۲\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{۱-\alpha}}, \quad \Rightarrow \quad (۱-\ell)^{\alpha} = \left(\frac{۲\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{۱-\alpha}}$$

و سرانجام

$$\underbrace{۱-\ell}_{\text{میزان کار}} = \left(\frac{۲\beta}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{۱-\alpha}}$$

البته این مساله پاسخ گوشه‌ای نیز دارد! اگر ضریب $\lambda_۲ = ۰$ باشد، بدین معنی که قید دوم در مساله‌ی بهینه‌یابی اعمال نمی‌شود، در این‌صورت صرفاً باید از طریق سه معادله‌ی دستگاه (۷) مقادیر تخصیص بهینه را پیدا کرد که همان قسمت (آ) خواهد بود.

د) باید تاثیر تغییرات پارامتر β روی مصرف و استراحت را بیابیم. در قسمت (آ) مقدار مصرف را به‌گونه‌ی زیر یافتیم:

$$c(\beta) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}, \quad c'(\beta) = \frac{۱}{\alpha-۱}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$$

رابطه‌ی بالا بدین معنی است که شرط $\alpha > ۱$ حاکی از آن‌است که با افزایش مقدار β میزان مصرف نیز افزایش خواهد یافت. برای میزان کار نیز چنین شرطی برقرار است.

سوال ۳. تابع مطلوبیت رابینسون را به‌صورت

$$U(c,\ell) = c^{\beta}\ell^{1-\beta}, \quad 0 < \beta < 1$$

در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

آ) نخست نشان دهید تابع مطلوبیت در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$\frac{\partial U}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \ell} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \ell^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \ell^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial c\,\partial \ell}\right)^2 > 0$$

ب) اگر تکنولوژی تولید رابینسون با تابع $y = A(1-\ell)^{\alpha}$ باشد، پس از بیان مساله‌ی رابینسون به زبان ریاضی، تخصیص‌های بهینه‌ی میزان کارکرد و استراحت او را بر حسب پارامترهای عنوان شده به‌دست آورید.

ج) نشان دهید یک تبدیل هموار[3] Γ وجود دارد که تابع مطلوبیت مساله‌ی ۱ را به تابع مطلوبیت مساله‌ی **۳** نگاشت می‌کند، بدین معنی که

$$\Gamma(u) = U$$

د) $(*)$ نشان دهید تخصیص‌های بهینه‌ی دو تابع مطلوبیت u_1 و u_2 با وجود نگاشت هموار Γ با ویژگی $\Gamma(u_1) = u_2$، همیشه برابر می‌باشند.

سوال ۴. در این مساله نشان می‌دهیم که توابع مطلوبیت تحت نگاشت‌های هموار و یکنواخت نقاط تخصیص بهینه را حفظ می‌کنند. دوباره در این مساله متغیر ℓ نشانگر میزان استراحت رابینسون است.

آ) با مشتق‌گیری جزیی از تابع مطلوبیت نسبت به متغیرهای مصرف و استراحت و استفاده از ویژگی $0 < \beta < 1$، داریم که:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial c} &=& \beta c^{\beta-1}\ell^{1-\beta} & > & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial \ell} &=& (1-\beta)c^{\beta}\ell^{-\beta} & > & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 U}{\partial c^2} &=& \underbrace{\beta(\beta-1)}_{<0} c^{\beta-2}\ell^{1-\beta} & < & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 U}{\partial \ell^2} &=& \underbrace{-\beta(1-\beta)}_{<0} c^{\beta}\ell^{-\beta-1} & < & 0 \end{cases}$$

حال بخش آخر سوال را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \ell^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial c\,\partial \ell}\right)^2 &= \beta(\beta-1)c^{\beta-2}\ell^{1-\beta} \times (-\beta(1-\beta))c^{\beta}\ell^{-\beta-1} - \left(\beta(1-\beta)c^{\beta-1}\ell^{-\beta}\right)^2 \\ &= \beta^2(1-\beta)^2\left(c^{2\beta-2}\ell^{-2\beta} - c^{2\beta-2}\ell^{-2\beta}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

[3]Smooth function

ب) رابینسون همواره قصد دارد تا مطلوبیت خود را بیشینه کند، در اینجا تابع تولید به‌صورت $y = A(۱-\ell)^\alpha$ داده شده است، در این‌صورت مساله‌ی بهینه‌یابی مطلوبیت به زبان ریاضی به‌گونه‌ی زیر قابل بیان است:

$$\begin{cases} \max\limits_{c,\,\ell} & c^\beta \ell^{۱-\beta} \\ \text{قیود} & c \leq y \end{cases}$$

تابع لاگرانژ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(c,\ell,\lambda) = c^\beta \ell^{۱-\beta} - \lambda\left(c - A(۱-\ell)^\alpha\right)$$

حال مشتق‌های جزیی مرتبه‌ی نخست از تابع $\mathcal{L}$ که با شرایط مرتبه‌ی نخست مشهورند را می‌یابیم:

$$\text{FOC:}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} &= \beta c^{\beta-۱}\ell^{۱-\beta} - \lambda &= ۰ \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} &= (۱-\beta)c^\beta \ell^{-\beta} - A\lambda\alpha(۱-\ell)^{\alpha-۱} &= ۰ \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_۱} &= -c + A(۱-\ell)^\alpha &= ۰ \end{cases} \tag{۸}$$

با تقسیم دو معادله‌ی نخست از دستگاه (۸) داریم

$$\frac{\beta}{۱-\beta}\cdot\frac{\ell}{c} = \frac{۱}{A\alpha(۱-\ell)^{\alpha-۱}}$$

حال با استفاده از معادله‌ی سوم از دستگاه (۸) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\beta}{۱-\beta}\cdot\frac{\ell}{c} = \frac{۱-\ell}{A\alpha(۱-\ell)^\alpha} = \frac{۱-\ell}{\alpha c}$$

و سرانجام با فرض $c \neq ۰$، داریم:

$$\frac{\beta}{۱-\beta}\cdot \ell = \frac{۱-\ell}{\alpha}$$

از حل معادله‌ی بالا، مقدار استراحت به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\ell = \frac{۱-\beta}{\alpha\beta - \beta + ۱}$$

با جایگذاری میزان مصرف بهینه را نیز می‌توان به‌دست آورد:

$$c = A(۱-\ell)^\alpha = A\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-\beta+۱}\right)^\alpha$$

ج) به‌سادگی تابع Γ را به صورت $\Gamma(u) = \ln u$ تعریف کنید، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Gamma(u) = \beta \ln c + (۱-\beta)\ln \ell$$

حال تعریف $\alpha_c = \beta$ و $\alpha_\ell = ۱-\beta$ که هر دو با توجه به فرض مساله مثبت‌اند حکم را به اثبات می‌رساند.

د) نگاشت هموار همواره صعودی است، و هر نقطه‌ی بحرانی از تابع مطلوبیت $u_۱$ یک نقطه‌ی بحرانی از تابع مطلوبیت $u_۲$ است و برعکس. این گفته حکم را ثابت می‌کند.